Universidad Simón Bolívar
Departamento de Física

FS1112. 1^{er} Parcial (30 %). Bloque $\mathbf{B}^{\gamma}$
Viernes, 22 de Noviembre de 2013

Nombre ______________________________ Carnet ______________

1. [2 *pts.*] Tres masas puntuales $\boldsymbol{m}$ idénticas están colocadas en el plano $\boldsymbol{x}$–$\boldsymbol{y}$ como se muestra en la figura. Están conectadas por medio de barras de masa despreciable para formar un cuerpo rígido con brazos de igual longitud $\boldsymbol{a}$. Dos de ellas están a una distancia $\boldsymbol{a}$ del eje $\boldsymbol{y}$. El momento de inercia del sistema respecto al eje $\boldsymbol{y}$ es:

( ) $4ma^2$

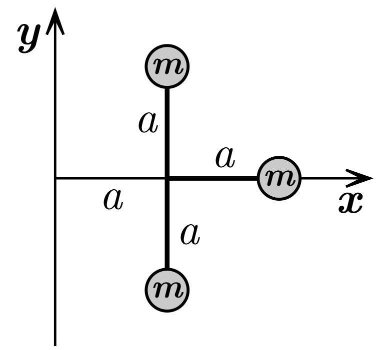
( ) $3ma^2$

( ) $2ma^2$

(×) $6ma^2$

( ) $5ma^2$

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i x_i^2 \\ &= 2m \times a^2 + m \times (2a)^2 = \boxed{6ma^2} \end{aligned}$$



2. [2 *pts.*] En la figura se muestra un gráfico $\boldsymbol{\omega}$ *vs.* $\boldsymbol{t}$ para un objeto en rotación. El desplazamiento angular $\boldsymbol{\Delta\theta}$ del objeto, entre $t = 0\,s$ y $t = 4\,s$ es

(×) $\Delta\theta = 6\,[rad]$

( ) $\Delta\theta = 4\,[rad]$

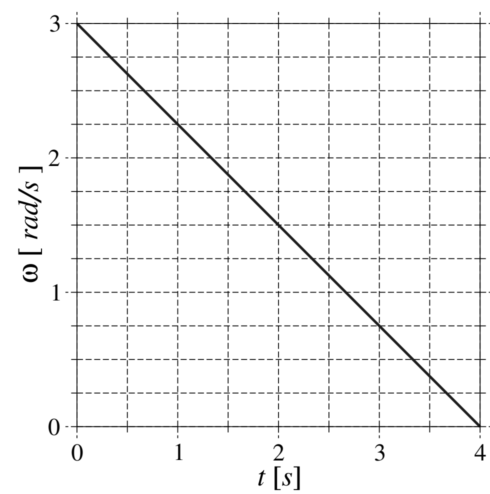
( ) $\Delta\theta = 3\,[rad]$

( ) $\Delta\theta = 2\,[rad]$

( ) $\Delta\theta = 12\,[rad]$

Área bajo la curva $\boldsymbol{\omega}$ *vs.* $\boldsymbol{t}$:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{1}{2}|\Delta\omega|\Delta t \\ &= \frac{1}{2}\,(3\,[rad/s]) \times (4\,[s]) \\ &= \boxed{6\,[rad]} \end{aligned}$$



3. [2 *pts.*] Un cilindro de radio $\boldsymbol{R}$, masa $\boldsymbol{M}$ y momento de inercia $\boldsymbol{I}$, sube un plano inclinado rodando sin deslizar hasta que se detiene. Se puede afirmar que:

(×) La fuerza de roce es distinta de cero pero se conserva la energía mecánica total[1]

( ) La fuerza de roce es igual a cero y se conserva la energía mecánica total

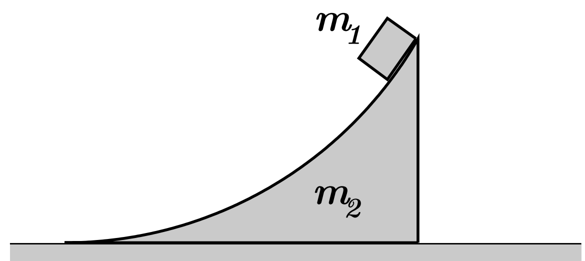
( ) La fuerza de roce es distinta de cero y no se conserva la energía mecánica total

( ) La fuerza de roce es igual a cero pero no se conserva la energía mecánica total

( ) La fuerza de roce apunta en dirección opuesta a la velocidad

[1] La fuerza de roce es de tipo estática y no hace trabajo, y la gravedad es conservativa

4. [3 *pts.*] La figura muestra un bloque de masa $\boldsymbol{m_1} = 2\,Kg$, que se suelta desde el extremo superior de una cuña curva, de masa $\boldsymbol{m_2} = 3\,Kg$, la cual está apoyada sobre el piso horizontal. Ambos cuerpos están inicialmente en reposo, y no existe fricción ni entre el bloque y la cuña, ni entre la cuña y el piso. En el instante en que el bloque sale por el extremo inferior de la cuña, lleva una velocidad horizontal $\vec{\boldsymbol{v}}_{12} = -10\,\widehat{\boldsymbol{x}}\ [cm/s]$ respecto a la cuña. La velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, de la cuña respecto al piso es, en ese instante:



(X) $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = +4\,\widehat{\boldsymbol{x}}\ [cm/s]$

( ) $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = -4\,\widehat{\boldsymbol{x}}\ [cm/s]$

( ) $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = +6\,\widehat{\boldsymbol{x}}\ [cm/s]$

( ) $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = -10\,\widehat{\boldsymbol{x}}\ [cm/s]$

( ) $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = -6\,\widehat{\boldsymbol{x}}\ ,[cm/s]$

Sistema de dos cuerpos, donde no hay fuerzas horizontales ($V_{cm,x} = 0$):

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \vec{\boldsymbol{v}}_{2/cm} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{\boldsymbol{v}}_{12} \\
&= -\frac{2}{5}\,(-10\,\widehat{\boldsymbol{x}}\ [cm/s]) \\
&= \boxed{+4\,\widehat{\boldsymbol{x}}\ [cm/s]}
\end{aligned}$$

5. [2 *pts.*] La figura sombreada muestra una placa delgada con densidad uniforme $\boldsymbol{\sigma}$, contenida en el plano $\boldsymbol{x}$–$\boldsymbol{y}$. La posición $\vec{\boldsymbol{R}}_{CM}$ del centro de masa está dada por

( ) $\vec{\boldsymbol{R}}_{CM} = \dfrac{1}{8}\ (\,14\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 12\,\widehat{\boldsymbol{y}}\,)\ [\,cm\,]$

(X) $\vec{\boldsymbol{R}}_{CM} = \dfrac{1}{8}\ (\,14\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 15\,\widehat{\boldsymbol{y}}\,)\ [\,cm\,]$

( ) $\vec{\boldsymbol{R}}_{CM} = \dfrac{1}{8}\ (\,12\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 15\,\widehat{\boldsymbol{y}}\,)\ [\,cm\,]$

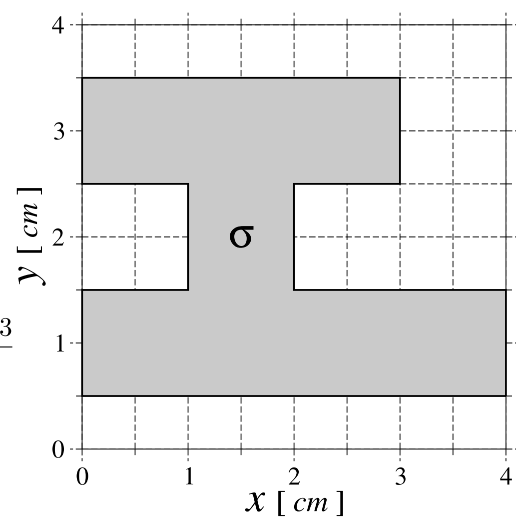
( ) $\vec{\boldsymbol{R}}_{CM} = \dfrac{1}{8}\ (\,14\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 16\,\widehat{\boldsymbol{y}}\,)\ [\,cm\,]$

( ) $\vec{\boldsymbol{R}}_{CM} = \dfrac{1}{8}\ (\,12\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 16\,\widehat{\boldsymbol{y}}\,)\ [\,cm\,]$

A cada cuadrado de área A le asignamos masa $\sigma A = 1$, donde $A = 1\,[cm^2]$ y $\sigma = 1\,[cm^{-2}]$:

$$X_{cm} = \frac{4\times 2 + 4\times 1.5}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_{cm} = \frac{14}{8}}$$

$$Y_{cm} = \frac{4\times 1 + 1\times 2 + 3\times 3}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_{cm} = \frac{15}{8}}$$



6. [2 *pts.*] Un cilindro hueco, de radio $\boldsymbol{R}$ y masa $\boldsymbol{M}$ distribuida uniformemente en la superficie, rueda sin deslizar. El cociente entre la energía cinética de traslación K_T y la energía cinética de rotación K_R es:

( ) $K_T/K_R = 2$

( ) $K_T/K_R = 1.5$

( ) $K_T/K_R = 2.5$

(X) $K_T/K_R = 1$

( ) $K_T/K_R = 0.5$

La energía cinética total es:

$$K = K_T + K_R, \qquad \text{donde}$$

$$K_T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 \ \wedge\ K_R = \frac{1}{2}I_0\omega^2 \qquad \text{con} \qquad I_0 = MR^2 \ \wedge\ V_{cm}^2 = \omega^2 R^2$$

$$K_T = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \ \wedge\ K_R = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{K_T/K_R = 1}$$

7. [2 *pts.*] Una barra delgada, de masa $\boldsymbol{M}$ y longitud $\boldsymbol{L}$, se suelta desde el reposo en la posición horizontal mostrada en la figura. El soporte esta firmemente anclado al techo. La velocidad del punto B del borde de la barra, cuando ésta llega a la posición vertical, es

( ) $v_{B} = \sqrt{2\,gL}$

( ) $v_{B} = \sqrt{gL}$

(×) $v_{B} = \sqrt{3\,gL}$

( ) $v_{B} = 2\sqrt{3\,gL}$

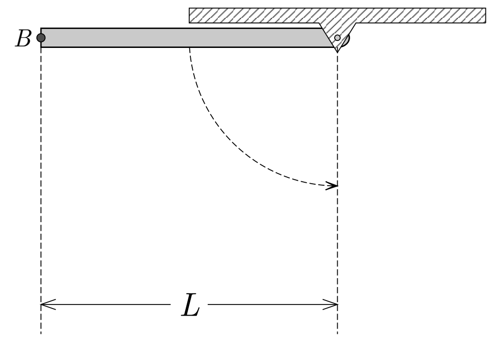
( ) $v_{B} = 2\sqrt{gL}$

$$-\Delta U = \frac{1}{2}MgL = \frac{1}{2}I_P\omega^2 = \Delta K$$

$$I_P = \frac{1}{3}ML^2 \quad \wedge \quad v_{B} = \omega L$$

$$\Rightarrow MgL = \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 = \frac{1}{3}Mv_{B}^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{v_{B}^2 = 3gL}$$



8. [2 *pts.*] Podemos aplicar conservación de la energía a un cilindro que rueda sin deslizar, <u>cuesta abajo</u> por un plano inclinado porque

( ) No hay fuerza de fricción entre la superficie del plano inclinado y la del cilindro

( ) El coeficiente de fricción cinética es cero

(×) La velocidad lineal del punto de contacto relativa a la superficie inclinada es cero[2]

( ) Los coeficientes de fricción estática y de fricción cinética son iguales

( ) La velocidad angular del centro de masa alrededor del punto de contacto es cero

9. [3 *pts.*] La figura muestra un par de discos, ambos de radio $\boldsymbol{R}$, que pueden rotar alrededor de sus respectivos ejes centrales fijos. El disco de la izquierda (#1) tiene un piñón coaxial, de radio $\boldsymbol{r = R/2}$, alrededor del cual pasa una correa de transmisión inextensible que no desliza, que pasa por el borde del disco de la derecha (#2). Del disco (#1) cuelga un bloque de masa $\boldsymbol{m}$, por medio de un cuerda enrollada a su borde externo. Se sabe que el bloque desciende con aceleración $a = 2\,[m/s^2]$. La magnitud a_T de la aceleración <u>tangencial</u> del punto P, indicado en el borde del disco (#2), es

( ) $a_T = 0.5\,[m/s^2]$

( ) $a_T = 2\,[m/s^2]$

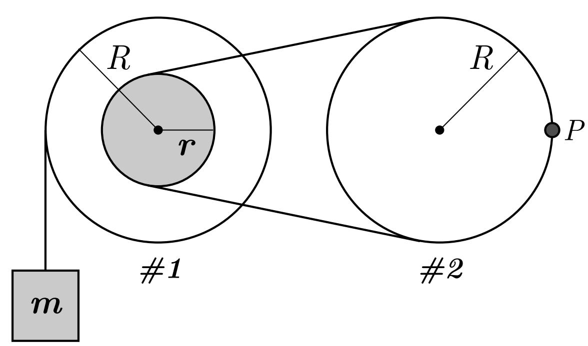
(×) $a_T = 1\,[m/s^2]$

( ) $a_T = 4\,[m/s^2]$

( ) No se puede calcular, porque no se conoce el valor del radio R de los discos.

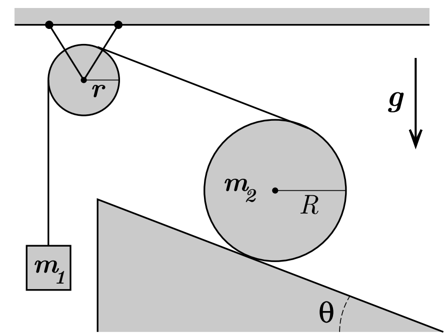
La aceleración tangencial del punto P es igual, en módulo, a la aceleración tangencial del piñón. Ésta, a su vez, es la mitad de la aceleración del borde del cilindro, ya que $r = R/2$. Luego:

$$\boxed{a_T = 1\,[m/s^2]}$$



[2] La fuerza de roce es de tipo estática y no hace trabajo, y la gravedad es conservativa

10. [10 *pts.*] El sistema mostrado en la figura consta de una rueda cilíndrica de radio $\boldsymbol{R}$ y masa $\boldsymbol{m_2}$, de cuyo borde se desenrrolla una cuerda inextensible, paralela al plano inclinado. La cuerda pasa sin deslizar por una polea de radio $\boldsymbol{r}$, para terminar, en el otro extremo, sujetando a un bloque de masa $\boldsymbol{m_1}$, que puede moverse verticalmente. Las masas de la cuerda y de la polea son despreciables. La polea está firmemente anclada al techo de manera que su eje está fijo, y el mismo no presenta fricción. Entre la rueda y el plano inclinado en un ángulo $\boldsymbol{\theta} = 30^\circ$ $[\pi/6]$ con la horizontal, existe suficiente fricción de manera que ruede sin deslizar.



(a) [4 *pts.*] Escriba las ecuaciones de movimiento para los elementos del sistema, y los vínculos que relacionan a la aceleración $\boldsymbol{a}_1$ del bloque con la aceleración $\boldsymbol{a}_2$ del centro de masa de la rueda.

(b) [6 *pts.*] Calcule la aceleración $\boldsymbol{a}_1$ del bloque y la aceleración $\boldsymbol{a}_2$ del centro de masa de la rueda. Igualmente, calcule la tensión $\boldsymbol{T}$ de la cuerda y la fuerza de fricción $\vec{\boldsymbol{f}}$ que ejerce el plano inclinado sobre la rueda. ¿ En qué dirección apunta el vector $\vec{\boldsymbol{f}}$?

Respuestas:

Escogemos los ejes de la siguiente manera: $\widehat{\boldsymbol{x}}\,(\nwarrow)$, $\widehat{\boldsymbol{y}}\,(\swarrow)$, $\widehat{\boldsymbol{z}}\,(\odot)$.

Sea P el punto de contacto de la rueda con el plano inclinado, en el cual está aplicada la fricción $\boxed{\vec{\boldsymbol{f}} = f\,\widehat{\boldsymbol{x}}\,,}$ y B el punto en el borde de la rueda, en el cual está aplicada la tensión $\boxed{\vec{\boldsymbol{T}} = T\,\widehat{\boldsymbol{x}}}$ de la cuerda. Ésta última también actúa sobre el bloque, pero en dirección $-\widehat{\boldsymbol{y}}'$ $(\uparrow)$, debido a que la polea no tiene masa.

Así, las aceleraciones quedarán definidas como $\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}_1 = a_1\,\widehat{\boldsymbol{y}}'}$ y $\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}_2 = a_2\,\widehat{\boldsymbol{x}}\,,}$ mientras que el vector aceleración angular para la rueda será $\boxed{\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha\,\widehat{\boldsymbol{z}}}$

(a) Las ecuaciones de movimiento quedan, entonces:

$$\sum F_y = m_1 g - T = m_1 a_1 \quad \text{(bloque)} \tag{1}$$

$$\sum F_x = f + T - m_2 g \operatorname{sen}\theta = m_2 a_2 \quad \text{(rueda)} \tag{2}$$

$$\sum \tau_{/CM} = RT - Rf = I_0 \alpha \quad \text{(rueda)} \tag{3}$$

$$\sum \tau_{/P} = 2RT - m_2 g R \operatorname{sen}\theta = I_P \alpha \quad \text{(rueda),} \tag{4}$$

donde $\tau_{/CM}$ es el torque respecto al centro de masa, con $I_0 = \frac{1}{2} m_2 R^2$ y $\tau_{/P}$, respecto al punto de contacto. Por el teorema de ejes paralelos, $I_P = \frac{3}{2} m_2 R^2$. Los vínculos están dados por las relaciones $\boxed{a_1 = a_B = 2R\alpha}$, siendo a_B la aceleración tangencial en el punto B, y por la condición de rodadura $\boxed{a_2 = R\alpha.}$ Combinando ambas ecuaciones, podemos definir la aceleración del sistema (a) como

$$2R\alpha = a = a_1 = \frac{2R}{R} a_2 = 2a_2\,. \tag{5}$$

(b) Reescribimos las ecuaciones (1)–(4), haciendo $\operatorname{sen}\theta = 1/2$ y, usando solamente la aceleración a del sistema, escogemos la ecuación (4) donde no aparece la fricción f. Ejecutando la operación $(4)/2R$ y restando la expresión a la ecuación (1), se obtiene:

$$\begin{aligned} T + m_1 a &= m_1 g && (6) \\ T - \frac{I_P}{(2R)^2} a \; = \; T - \frac{3}{2}\frac{R^2}{(2R)^2} m_2 a \; = \; T - \frac{3}{8} m_2 a &= \frac{1}{4} m_2 g && (7) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_1 + \frac{3}{8} m_2\right) a = \left(m_1 - \frac{1}{4} m_2\right) g \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{a = \frac{8m_1 - 2m_2}{8m_1 + 3m_2}\, g} \tag{8}$$

$$T = m_1 g - m_1 a = m_1 g \left(1 - \frac{8m_1 - 2m_2}{8m_1 + 3m_2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{T = \frac{5m_1 m_2}{8m_1 + 3m_2}\, g} \tag{9}$$

Utilizando ahora la ecuación (5) para los vínculos, y la ecuación (3) para despejar la componente x de la fricción (f), se obtiene:

$$a_1 = a \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{a_1 = \frac{8m_1 - 2m_2}{8m_1 + 3m_2}\, g} \tag{10}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{a_2 = \frac{4m_1 - m_2}{8m_1 + 3m_2}\, g} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} f = T - \frac{I_0 \alpha}{R} = T - \frac{1}{4} m_2 a \quad &= \quad \frac{5m_1 m_2}{8m_1 + 3m_2}\, g - \frac{1}{4}\left(\frac{8m_1 m_2 - 2m_2^2}{8m_1 + 3m_2}\right) g && (12) \\ &= \quad \frac{1}{4}\left(\frac{12 m_1 m_2 + 2m_2^2}{8m_1 + 3m_2}\right) g && (13) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{2}\left(\frac{6m_1 m_2 + m_2^2}{8m_1 + 3m_2}\right) g\, \widehat{\boldsymbol{x}}} \tag{14}$$

Es decir, que la fuerza de fricción $\vec{\boldsymbol{f}}$ apunta hacia arriba en el plano inclinado.